Prop. 3: $f : V \to W$ linear
(a) Kern $(f) \subseteq V$ Unterraum
(b) f ist injektiv $\Leftrightarrow$ Kern$(f) = \{0\}$.
Bew.: (a): $f(0) = 0 \Rightarrow 0 \in$ Kern$(f) \Rightarrow$Kern$(f) \neq \emptyset$
Seien $v, w \in$Kern$(f) \Rightarrow f(v+w) = f(v)+f(w) = 0+0 = 0 \Rightarrow v+w \in$Kern$(f)$
Seien $v \in$Kern$(f), a \in K \Rightarrow f(av) = a * f(v) = a * 0 = 0 \Rightarrow a * v \in$Kern$(f)$.

(b) "$\Rightarrow$": $f(0) = 0 \Rightarrow \{0\} \subseteq$Kern$(f)$. Sei $v \in$Kern$(f) \Rightarrow f(v) = 0 = f(0) \Rightarrow$ f injektiv
$v = 0$, also Kern$(f) \subseteq \{0\}$ Insgesamt Kern$(f) = \{0\}$.
"$\Leftarrow$": Sei Kern$(f) = \{0\}$. Seien $v, w \in V$ mit $f(v) = f(w) \Rightarrow f(v - w) = f(v) - f(w) = 0 \Rightarrow v - w \in$Kern$(f) \Rightarrow v - w = 0 \Rightarrow v = w$. qed

Def. 4: Sei V ein K-VR, $S \subseteq V$ Teilmenge (kann unendlich sein!).
(a) Ein $v \in V$ heißt Linearkombination von S, falls es zu jedem $u \in S$ ein $a_u \in K$ gibt mit:
(i) $a_u \neq 0$ nur für endlich viele $u \in S$,
(ii) $\sum_{U \in S} a_u * U = V$ (endliche Summe)
(b) $< S >\subseteq V$ ist die Menge aller Linearkombinationen von S. $< S >$ ist der von S erzeugte Unterraum.
(c) Falls $< S >= V$, so heißt S ein Erzeugendensystem von V.
(d) S heißt linear unabhängig (l.u.), falls gilt: Sind $a_u \in K$ Skalare $(u \in S)$ mit
(i) $a_u \neq 0$ nur für endlich viele $u \in S$,
(ii) $\sum_{U \in S} a_u * u = 0$,
dann folgt $a_u = 0 \forall u \in S$.

Bsp.: (1) $V = K[X], S = \{X^i | i \in \mathbb{N}\} = \{1, x, x^2, x^3, \ldots\}$
Linearkombinationen: $\sum_{i \in \mathbb{N}} a_i x^i$ mit $a_i \neq 0$ nur für endlich viele $i \in \mathbb{N} \Rightarrow$ die Linearkombinationen sind genau alle Polynome$\Rightarrow < S >= V$.
S l.u.? Seien $a_i \in K$ mit $a_i \neq 0$ nur für endlich viele i, so dass $\sum_{i \in \mathbb{N}} a_i x^i = 0 \Rightarrow a_i = 0 \forall i$ Also S l.u.

(2) M Menge, $V =$Abb.$(M, K) = \{f : M \to K | f$ Abbildung$\}$.
Für $y \in M$ definiere $\delta_y \in V$ durch $\delta_y(x) = \begin{cases} 1, \text{ falls } x = y \\ 0, \text{ sonst} \end{cases}$
$S = \{\delta_y | y \in M\} \subseteq V$. S l.u.? Seien $a_y \in K$ mit $a_y \neq 0$ nur für endlich viele $y \in M$, so dass $\sum_{y \in M} a_y * \delta_y = 0$ (Nullfunktion) $\Rightarrow \forall x \in M : 0 = (\sum_{y \in M} a_y * \delta_y)(x) = \sum_{y \in M} a_y * \delta_y(x) = a_x \Rightarrow a_x = 0 \forall x \in M$, also S l.u.
1. Fall: M ist endlich. Sei $f \in V$ beliebig. Setze $a_y := f(y) \forall y \in M, g := \sum_{y \in M} a_y * \delta_y \in< S >$.$\forall x \in M : g(x) = \sum_{y \in M} a_y \delta_y(x) = a_x = f(x) \Rightarrow f = g \in< S >$. Also $< S >= V$.
2. Fall: M ist unendlich. Betrachte $f \in V$ mit $f(x) = 1 \forall x \in M \Rightarrow f \notin< S >$, denn für jedes $g \in< S >$ gilt $g = \sum_{y \in M} a_y * \delta_y$ mit $a_y \in K, a_y \neq 0$

nur für endlich viele $y \in M \Rightarrow \forall x \in M : g(x) = a_x \neq 0$ nur für endlich viele $x \in M \Rightarrow f \neq g$

Also $< S > \neq V$.

Def. 5: Sei V ein K-VR, $S \subseteq V$ Teilmenge. S heißt Basis von V, falls gelten:
(i) S ist l.u.,
(ii) $< S > = V$.
Bsp.: (1) $\{x^i | i \in \mathbb{N}\}$ ist eine Basis von $K[X]$.
(2) Für $|M| = \infty$ ist keine Basis von Abb.(M, K) bekannt!
(3) Es ist keine Basis von $\mathbb{R}$ als $\mathbb{Q}$-VR bekannt.
(4) $\{1, i\}$ ist eine Basis von $\mathbb{C}$ als $\mathbb{R}$-VR

Satz/Def. 6: Sei V ein K-VR.
(a) V besitzt eine Basis.
(b) Falls V eine endliche Basis besitzt, so sind alle Basen endlich und haben gleich viele Elemente. Die Elementanzahl einer Basis heißt dann die Dimension von V, bez. $\dim(v)$. Andernfalls: $\dim(v) = \infty$ (unendlich-dimensional)

Anmerkungen zum Beweis: (a) zeigt man mit dem Zornschen Lemma (ist äquivalent zum Auswahlaxiom)
(b) folgt aus dem Steinitzschen Austauschsatz.
Bsp.: (1) $\dim(K[X]) = \infty$.
(2) M Menge; V=Abb$(M, K) \Rightarrow \dim(V) = \begin{cases} |M|, & M \text{ endl.} \\ \infty, & |M| = \infty \end{cases}$