Satz 8: Sei V ein K-VR mit $\dim(V) =: n < \infty \Rightarrow V \cong K^n$.
Bew.: Sei $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subseteq V$ eine Basis.

Definiere $f : K^n \to V$, $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \sum_{i=1}^n x_i v_i$. Nachprüfen: f ist linear.

Kern(f) =? Sei $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in$Kern$(f) \Rightarrow f \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^n x_i v_i = 0 \Rightarrow$ $x_i = 0 \forall i$. Also Kern$(f) = \{\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}\} \underset{\text{Prop. 3}}{\Rightarrow} f$ injektiv

f surjektiv: Sei $v \in V$ beliebig. Wegen $V =< S >$ gibt es $x_1, \ldots, x_n \in K$ mit $v = f \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. Also f surjektiv.

Darstellungsmatrix: Seien v, w K-VRe, $n = \dim(V) < \infty, m = \dim(W) < \infty$. Wähle Basen $S = \{v_1, \ldots, v_n\}, T = \{w_1, \ldots, w_m\}$ von V bzw. W.

Sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung.

Sei $j \in \{1, \ldots, n\} \Rightarrow f(v_j) \in W \Rightarrow \exists a_{1,j}, a_{2,j}, \ldots, a_{m,j} \in K$ mit $f(v_j) = \sum_{i=1}^m a_{ij} w_i, a_{ij}$ eindeutig. $A := (a_{ij}) \in K^{m \times n}$ ist die Darstellungsmatrix von f (bzgl. S und T). Notation: $A =: D_{S,T}(f)$.

f ist durch A eindeutig bestimmt! Sei nämlich $v \in V \Rightarrow \exists x_1, \ldots, x_n \in K$, $v = \sum_{j=1}^n x_j v_j$. Die x_i sind die Koordinaten von v (bzgl. S). $f(v) = f(\sum_{j=1}^n x_j v_j) = \sum_{j=1}^n x_j f(x_j v_j) = \sum_{j=1}^n x_j * \sum_{i=1}^m a_{ij} w_i = \sum_{i=1}^m (\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j) w_i$.

Regeln: S Bsis von $V_i T$ Basis von $W_i f$: $V \to W$ linear, $A = D_{S,T}(f)$.

(a) In den Spalten von A stehen die Koordinaten (bzgl. T) der Bilder der Basisvektoren von V.

(b) Ist $v \in V$ mit Koordinaten $x_1, \ldots, x_n \in K$(bzgl. S), so sind $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} := A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ die Koordinaten $y_1 \ldots y_m$ von $F(v)$ bzgl. T gegeben.

(c) Falls $V = W$, so wird "immer" $S = T$ gewählt.

Bsp.: (1) $V = W = \mathbb{R}^2$, f= Drehung um 90 Grad nach links. $S = T = \{\underset{e_1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}, \underset{e_2}{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}\}$ Standard-Basis

$f(e_1) = e_2 = 0 * e_1 + 1 * e_2$

$f(e_2) = -e_1 = (-1) * e_1 + 0 * e_2$. $A = D_{S,T}(f) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

(2) $v = w = \{f \in K[X] | \deg(f) < 3\}, S = T = \{1, x, x^2\}$

$\varphi : v \to v, f \mapsto f'$ (Ableitung) $\varphi(1) = 0, \varphi(x) = 1, \varphi(x^2) = 2x \Rightarrow A = D_{S,S}(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Kapitel IV Analysis

Stichworte: Folgen, Reihen, Grenzwerte, Stetigkeit, differenzieren, Integral

§20 Reelle Zahlen

Wiederholung Kap. II

Konstruktion von $\mathbb{N}$: $0 = \emptyset, 1 = \{0\} = \{\emptyset\}, 2 = \{0, 1\} = \{\emptyset, \{emptyset\}\}, \ldots \to$ Peano-Axiome, Definition von $+, *$, Rechenregeln, Def. von "$\leqq$".

- Konstruktion $\mathbb{N} \rightsquigarrow \mathbb{Z}$ (ganze Zahlen) $\to \mathbb{Z}$ ist kommutativer Ring mit "$\leqq$".
- Konstruktion $\mathbb{Z} \rightsquigarrow \mathbb{Q}$ (rationale Zahlen) $\to \mathbb{Q}$ ist ein Körper mit "$\leqq$".
- Konstruktion $\mathbb{Q} \rightsquigarrow \mathbb{R}$ (reelle Zahlen): Dedekindsche Schnitte
- Konstruktion $\mathbb{R} \rightsquigarrow \mathbb{C}$ (komplexe Zahlen) $\to \mathbb{C}$ ist algebraisch abgeschlossener Körper (ohne "$\leqq$")

Eigenschaften von $\mathbb{R}$:

Satz 1: (a) $\mathbb{R}$ ist ein Körper $((\mathbb{R}, +)$ und $(\mathbb{R}\backslash\{0\}, *))$ sind abelsche Gruppen. (Distributivgesetz)

(b) $\mathbb{R}$ hat eine Totalordnung "$\leqq$" mit $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$:

(i) $a \leqq b \Rightarrow a + c \leqq b + c$

(ii) $a \leqq b$ und $c \geqq 0 \Rightarrow ac \leqq bc$

$\to \mathbb{R}$ ist Körper mit (c) Jede nicht-leere, nach unten beschränkte Menge $A \subseteq \mathbb{R}$ besitzt ein Infimum $\alpha \in \mathbb{R}$.

Erinnerung: Eine Menge $A \subseteq \mathbb{R}$ heißt nach unten beschränkt, falls ein $y \in \mathbb{R}$ existiert mit $\forall x \in A$: $y \leqq x$. y heißt dann untere Schranke von A. Es gibt dann mehrere untere Schranken! Z.B. ist mit y auch $y - 1$ untere Schranke.