Falls y eine untere Schranke von A ist: Falls $y \in A$, so heißt y ein Minimum von A, bez. $y = \min(A)$. So etwas existiert nicht immer! Z.B. $A = \mathbb{R}_{>0}$.

$\alpha \in \mathbb{R}$ heißt Infimum (=größte untere Schranke), falls gelten:

(1) α ist untere Schranke von A

(2) Falls $\beta \in \mathbb{R}$ eine untere Schranke ist, so folgt $\beta \leqq \alpha$.

Ein Infimum ist eindeutig bestimmt: Sei β ein weiteres Infimum $\Rightarrow \beta$ untere Schranke $\Rightarrow \beta \leqq \alpha$. Umgekehrte Rollen von $\alpha, \beta : \alpha \leqq \beta$. Also $\alpha = \beta$.

Schreibweise: $\alpha = \inf(A)$.

Minimum existiert nicht immer, Infimum existiert immer (falls $A \neq \emptyset$ nach unten beschränkt). Falls $\min(A)$ existiert, dann $\min(A) = \inf(A)$.

"Komplementäre" Begriffe mit umgekehrten Ungleichungen: nach oben beschränkt, obere Schranken, Maximum, Supremum (=kleinste obere Schranke).

Satz 2 ("Eindeutigkeit" von $\mathbb{R}$): $\mathbb{R}$ ist bis auf Isomorphie durch die Eigenschaften aus Satz 1 eindeutig bestimmt.

Genauer: Sei X eine Menge mit Verknüpfungen $+$ und $*$ und mit einer Relation $\leqq$, so dass Satz 1 für X gilt. Dann gibt es genau eine Bijektion $\varphi : \mathbb{R} \to X$ mit

(i) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} : \varphi(\alpha + \beta) = \varphi(\alpha) + \varphi(\beta)$ und $\varphi(\alpha * \beta) = \varphi(\alpha) * \varphi(\beta)$

(ii)$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} : \alpha \leqq \beta \Leftrightarrow \varphi(\alpha) \leqq \varphi(\beta)$

Ohne Beweis

Für uns bedeutet dies: Wir müssen uns nur Satz 1 merken. Alle Aussagen über $\mathbb{R}$ folgen aus Satz 1 und nicht aus der Konstruktion von $\mathbb{R}$.

Satz 3 (Folgerungen aus Satz 1(a, b)): Seien $a, b, c \in \mathbb{R} \Rightarrow$

(a) Es gilt genau eine der Aussagen (i) $a < b$ (ii) $a = b$ (iii) $a > b$.

(b) $a \leqq b \Leftrightarrow b - a \geqq 0$

(c) $a \leqq b \Leftrightarrow -a \geqq -b$

(d) $a \leqq b$ und $c \leqq 0 \Rightarrow ca \geqq cb$

(e) $a^2 \geqq 0$, insb. $1 > 0$

(f) $0 < a \leqq b \Rightarrow 0 < \frac{1}{b} \leqq \frac{1}{a}$.

Bew.: (a) folgt direkt aus "$\leqq$" Totalordnung.

(b) "$\Rightarrow$": Sei $a \leqq b \Rightarrow 0 \leqq b - a$. "$\Leftarrow$": Sei $b - a \geqq 0 \Rightarrow b \geqq a$.

(c) "$\Rightarrow$": Sei $a \leqq b \Rightarrow -b \leqq -a$. "$\Leftarrow$": umgekehrt

(d) $c \leqq 0 \Rightarrow -c \geqq 0 \Rightarrow -ca \leqq -cb \Rightarrow cb \leqq ca$

(e) 1. Fall: $a \geqq 0 \Rightarrow a^2 \geqq 0 * a = 0$

2. Fall: $a < 0 \Rightarrow a^2 \geqq 0 * a = 0$

Insb. $1 = 1^2 \geqq 0 \Rightarrow 1 > 0$.

(f) Annahme: $\frac{1}{b} \leqq 0 \Rightarrow 1 = b * \frac{1}{b} \leqq 0$, Widerspruch zu (e). Also $\frac{1}{b} > 0$. Ebenso $\frac{1}{a} > 0 \Rightarrow \frac{1}{ab} > 0$. $a \leqq b \Rightarrow \frac{1}{b} \leqq \frac{1}{a}$.

Korollar 4 (zu Satz 1(c)): Jede nicht-leere nach oben beschränkte Menge $A \subseteq \mathbb{R}$ besitzt ein Supremeum $\alpha = \sup(A) \in \mathbb{R}$.

Bew.: Wegen Satz 3(c) ist $-A := \{-a|a \in A\}$ nach unten beschränkt $\Rightarrow \exists \beta = \inf(-A) \Rightarrow -\beta = \sup(A)$

Satz 5 (Archimedisches Prinzip): $\forall a \in \mathbb{R} \exists n \in \mathbb{N} : n > a$

Bew.: Annahme: $\exists a \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N} : a \geqq n$, d.h. $\mathbb{N}$ ist nach oben beschränkt $\Rightarrow \exists s = \sup(\mathbb{N}) \in \mathbb{R}$. s ist kleinste obere Schranke $\Rightarrow s-1$ ist keine obere Schranke von $\mathbb{N} \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} : n > s-1 \Rightarrow s < n+1 \in \mathbb{N}$, Widerspruch zu "$s$ ist obere Schranke von $\mathbb{N}$"

Korollar 6: Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0} \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n} < \varepsilon$.

Bew.: $\exists n \in \mathbb{N} : n > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon$

Satz 7 ("Wohlordnung" von $\mathbb{N}$): Jede nicht-leere Teilmenge $A \subseteq \mathbb{N}$ enthält ein Minimum.

Bew.: A ist nach unten beschränkt (z.B. durch 0)$\Rightarrow \exists a = \inf(A) \in \mathbb{R}$. Annahme: $a \notin A$. $a+1$ ist keine untere Schranke von $A \Rightarrow \exists n \in A : n < a+1 \Rightarrow a < n < a+1$. Dasselbe mit n anstelle von $a+1$ liefert:$\exists n \in A : a < n' < n < a+1 \Rightarrow n' < n < a+1 < n'+1$

Widerspruch zu §3 Satz 9 ("es gibt keine natürliche Zahl zwischen n' und $n'+1$"). Also $a \in A \Rightarrow a = \min(A)$.

Korollar 8: Sei $a \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z}$. $a \leqq k < a+1$.

Bew.: 1. Fall: $a \geqq 0$. $A := \{n \in \mathbb{N}|n \geqq a\} \neq \emptyset$ wegen Satz 5 $\Rightarrow \exists k = \min(A) \in \mathbb{N} \Rightarrow k \geqq a$. Annahme: $k \geqq a+1 \Rightarrow k-1 \geqq a \Rightarrow k-1 \in A$ Widerspruch zu $k = \min(A)$. Also $k < a+1$.

2. Fall: $a < 0$. Satz 5: $\exists n \in \mathbb{N} : a < n \Rightarrow n+a > 0 \Rightarrow \exists k \in \mathbb{N} : n+a \leqq k < n+a+1 \Rightarrow a \leqq k-n < a+1$

Korollar 9: Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b \Rightarrow \exists r \in \mathbb{Q} : a < r < b$.

Bew.: Kor. 6:$\exists n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n} < b-a \Rightarrow 1 < nb - na \Rightarrow na+1 < nb$. Korollar 8: $\exists k \in \mathbb{Z} : -na-1 \leqq k < -na \Rightarrow na < -k \leqq na+1 < nb \Rightarrow a < \frac{-k}{n} < b$