§21 Folgen und Grenzwerte

Def. 1: Eine Folge (reeller Zahlen) ist eine Abbildung $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$ (manchmal $\mathbb{N}_{>0} \to \mathbb{R}$). Schreibweise für Folgen: $\mathbb{N} \to \mathbb{R}, n \mapsto a_n$. Man Schreibt dies normalerweise $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ oder $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$

Bsp.: (1) $a_n = (-1)^n = \begin{cases} 1, n \text{ ungerade} \\ 1, n \text{ gerade} \end{cases}$

$a_n = (1, -1, 1, -1, \ldots)$

(2) $a_n = a \forall n$ mit $a \in \mathbb{R}$ fest gewählt ("konstante Folge")

(3) $a_n = \frac{1}{n+1}$

(4) $a_n = \frac{1}{2^n}$

(5) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definiert durch $a_0 = \frac{3}{2}, a_{n+1} = \frac{a_n^2+2}{2a_n} \forall n \in \mathbb{N}$ (rekursive Definition, siehe Rekursionssatz)

$(a_n) = (\frac{3}{2}, \frac{17}{12}, \frac{577}{408}, \ldots)$

Betrag: Für $a \in \mathbb{R}$ definiere $|a| = \max\{a, -a\} = \begin{cases} a, a \geqq 0 \\ -a, a < 0 \end{cases}$

Eigenschaften des Betrags: $\forall a, b \in \mathbb{R}$:

(i) $|a| > 0$

(ii) $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$

(iii) $|a + b| \leqq |a| + |b|$ ("Dreiecksungleichung")

(iv) $|a * b| = |a| * |b|$.

Abstand von a und $b \in \mathbb{R}$: $|a - b|$. a liegt nahe bei b, falls $|a - b|$ klein ist.

Def. 2: Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge und $a \in \mathbb{R}$. a heißt Grenzwert von (a_n), falls gilt: $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0} \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}$ mit $n \geqq N : |a_n - a| < \varepsilon$.

(a_n) heißt konvergent, falls ein Grenzwert $a \in \mathbb{R}$ existiert. Andernfalls heißt (a_n) divergent.

(a_n) heißt Nullfolge, falls 0 Grenzwert ist. Schreibweise: $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ (bedeutet: (a_n) ist konvergent mit Grenzwert a. Alternativ: $a_n \to a$ ("a_n geht gegen a")

Anmerkung: (a) $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ bedeutet: $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ gibt es höchstens endlich viele $n \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| \geqq \varepsilon$.

(b) (a_n) divergent $\Leftrightarrow \forall a \in \mathbb{R} \exists \varepsilon > 0$: $|a_n - a| \geqq \varepsilon$ gilt für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$.

Bsp.: (1) $a_n = (-1)^n \Rightarrow a_n$ divergent. Begründung: Sei $a \in \mathbb{R}$ beliebig. Wähle $\varepsilon = 1$ (willkürlich, auch $\varepsilon = \frac{1}{2}, \ldots$ würde funktionieren).

1. Fall: $a \geqq 0 \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}$ ungerade:$|a_n - a| = |-1 - a| = a + 1 \geqq 1 = \varepsilon$

2. Fall: $a < 0$: Sei $n \in \mathbb{N}$ gerade $\Rightarrow |a_n - a| = |1 - a| = 1 - a > 1 = \varepsilon$

Fazit: In beiden Fällen gibt es unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| \geqq \varepsilon$.

(2) $a_n = \frac{1}{n+1} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Grund: Sei $\varepsilon > 0$. Archimed. Prinzip: $\exists N \in \mathbb{N} : \frac{1}{N} < \varepsilon$. Sei $n \geqq N, n \in \mathbb{N} \Rightarrow n + 1 \geqq N \Rightarrow 0 < \frac{1}{n+1} \leqq \frac{1}{N} < \varepsilon \Rightarrow |\frac{1}{n+1} - 0| < \varepsilon$

(3) $a_n = a$ konstante Folge $\Rightarrow \lim_{n\Rightarrow\infty} a_n = a$. Grund: Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $N = 0 \Rightarrow \forall n \geqq N. |a_n - a| = |a - a| = 0 < \varepsilon$

Satz 3: Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent $\Rightarrow$ Der Grenzwert von (a_n) ist eindeutig bestimmt. Dies rechtfertigt die Schreibweise $a = \lim_{n\to\infty} a_n$.

Bew.: Seien $a, b \in \mathbb{R}$ Grenzwerte von (a_n). Annahme: $a \neq b \Rightarrow \varepsilon := \frac{|a-b|}{2} > 0. \exists N_1, N_2 \in \mathbb{N} : \forall n \geqq N_1 : |a_n - a| < \varepsilon, \forall n \geqq N_2, |a_n - b| < \varepsilon$. Setze $N := \max\{N_1, N_2\} \Rightarrow \forall n \geqq N; |a_n - a| < \varepsilon$ und $|a_n - b| < \varepsilon \Rightarrow \forall n \geqq N :$ $|a-b| = a - a_n + a_n - b| \leqq |a - a_n| + |a_n - b| < \varepsilon + \varepsilon = |a-b| \Rightarrow |a-b| < |a-b|$ Also $a = b$.